



I.o.  $u \in L^\infty \Rightarrow$  интегрируемо число определено

$$(dd'u)^k = dd'(u(dd'u)^{k-1}), \quad k=2, \dots, n:$$

||

$(dd'u) \in \mathcal{D}_p^+$ , — операторы МА.

Тоже верно:  $dd'u_1, \dots, n dd'u_p \in \mathcal{D}_p^+$ .

Особый случай:  $(dd'u)^n$ .

$$\forall u \in C^2 \Rightarrow (dd'u)^n = c_n \det H_u \cdot dV.$$

2. ~~Операторы~~ интегрируемые? МА не линейные  
операторы.  
(Презентация не решает)

Класс Черна-Лебана-Курендера (CLN):

$$u_1, \dots, u_n \in \mathcal{PSH} \cap L^\infty, \quad T \in \mathcal{D}_p^+, \quad p+k \leq n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T' := dd'u_1, \dots, n dd'u_k \wedge T \in \mathcal{D}_{p+k}^+$$

$$\|T'\|_K \leq C \|u_1\|_{L^\infty(U)} \dots \|u_k\|_{L^\infty(U)} \|T\|_U$$

$$\text{где } K \subset\subset U \subset\subset \Omega, \quad C = C(k, U, \Omega).$$

D. (уже) Does. give  $k=1$  (интегрируемые).

Берем  $\varphi \in \mathcal{D}^\infty, \varphi \geq 0: \varphi|_K \equiv 1, \varphi|_{\Omega \setminus U} \equiv 0$

$$\text{тогда } \|dd'u_1 \wedge T\|_K \leq C \int_K dd'u_1 \wedge T \wedge \beta^{n-p-1} \leq$$

$$\leq C \int_U \varphi dd'u_1 \wedge T \wedge \beta^{n-p-1} =$$

$$= C \int_U u_1 dd'\varphi \wedge T \wedge \beta^{n-p-1} \leq$$

$$\leq C_1 \|u_1\|_{L^\infty(U)} \|T\|_U.$$



T. (о монотонной сходимости).

$$T \in D_T^+, \quad u_j^l, u_j \in L^\infty(\Omega), \quad u_j^l \downarrow u_j, \quad 1 \leq j \leq k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dd^l u_1^l \wedge \dots \wedge dd^l u_k^l \wedge T \rightarrow dd^l u_1 \wedge \dots \wedge dd^l u_k \wedge T.$$

D. (узел) Система гарантируется:

$$\underbrace{u_k^l \wedge dd^l u_1^l \wedge \dots \wedge dd^l u_{k-1}^l \wedge T}_{S_k^l} \rightarrow \underbrace{u_k \wedge dd^l u_1 \wedge \dots \wedge dd^l u_k}_{S_k}.$$

С помощью разделения ~~экстремума~~:  
экстремаль-показательной функции.

Путь системы проверить сходимость в шаре  $B_1 = \{|z| < 1\}$ .

Можно считать: все  $u_j^l \leq -1$  в  $B_2$ .

Тогда:  $\tilde{u}_j^l := \max\{u_j^l, \underbrace{A(|z|^2 - 4)}_{\psi}\}$  ;

или  $A \gg 1$ :  $\tilde{u}_j^l = u_j^l$  в  $B_1$ ,  $\tilde{u}_j^l = \psi$  в  $\text{ср. } \partial B_2$

Значит, можно считать:

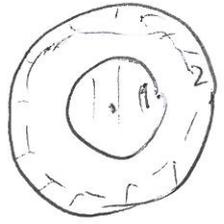
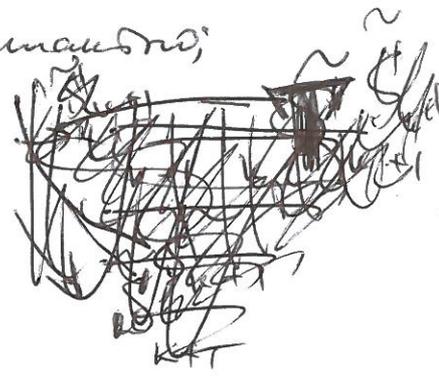
$$u_j^l = u_j = \psi \text{ в ср. } \partial B_2.$$

Углубление. 1)  $k=0$  - монот. сходимость.  
2) Пусть уже  $k$  гарантировано:

$$S_k^l \rightarrow S_k; \quad \text{Тогда } T_k^l := dd^l S_k^l \rightarrow dd^l S_k =: T_k$$

(CLM):  $\{T_k^l\}$  слабо компактно;

наша задача: если  $u_{k+1}^l \wedge T_k^l$   
сходится к  $S_{k+1}^l$ , то  $S_{k+1}^l$   
то  $S_{k+1}^l = S_{k+1}$ .



1. Показем:  $\tilde{S}_{k+1} \leq S_{k+1}$ , i.e.  
 $\tilde{S}_{k+1} \wedge \alpha \leq S_{k+1} \wedge \alpha \quad \forall \alpha = i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge i\alpha_p \wedge \bar{\alpha}_p$ .

Вло возмем  $g_j \in C(B_2)$ ,  $g_j \downarrow u_{k+1}^l$   
 Тогда  $\forall l \geq l_0, u_{k+1}^l T_k^l \leq u_{k+1}^{l_0} T_k \leq g_j T_k \quad \forall j$ ;

Значит;  
 $\tilde{S}_{k+1} \wedge \alpha \leq g_j T_k \wedge \alpha \xrightarrow{\text{монот. урег.}} u_{k+1}^l T_k \wedge \alpha$   
 $\downarrow$   
 $g_j T_k \quad (\text{i.e. } g_j \in C(B_2))$   
 $\xrightarrow{\text{монот. урег.}} \underline{S_{k+1} \wedge \alpha}$ .

2. Показем:  $\tilde{S}_{k+1} = S_{k+1}$ .

$$\int_{B_2} S_{k+1} \wedge \beta_{n-k-p} \leq \int_{B_2} u_{k+1}^l T_k \wedge \beta_{n-k-p} =$$

$$= \int_{B_2} u_1^l \left( dd^c u_{k+1}^l \wedge \dots \wedge dd^c u_k \right) \wedge T_k \wedge \beta_{n-k-p}.$$

монот.,  $u_{k+1}^l = u_1^l$

Читаю

$$= \int_{B_2} u_2^l dd^c u_1^l \wedge dd^c u_3^l \wedge \dots \wedge dd^c u_{k+1}^l \wedge T_k \wedge \beta_{n-k-p} = \dots$$

$$= \int_{B_2} u_{k+1}^l T_k^l \wedge \beta_{n-k-p} = \int_{B_2} S_{k+1}^l \wedge \beta_{n-k-p}.$$

$$S_{k+1}^l \wedge \beta_{n-k-p} \rightarrow \tilde{S}_{k+1} \wedge \beta_{n-k-p} \leq 0 \Rightarrow$$

~~$\int_{B_2} \tilde{S}_{k+1} \wedge \beta_{n-k-p} \leq 0$~~

$$\Rightarrow \int_{B_2} \tilde{S}_{k+1} \wedge \beta_{n-k-p} \geq \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{B_2} S_{k+1}^l \wedge \beta_{n-k-p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{B_2} S_{k+1} \wedge \beta_{n-k-p} \leq \int_{B_2} \tilde{S}_{k+1} \wedge \beta_{n-k-p}.$$

$S_{k+1}^l \geq \tilde{S}_{k+1} \Rightarrow \int S_{k+1}^l \geq \int \tilde{S}_{k+1} \Rightarrow \int S_{k+1} \geq \int \tilde{S}_{k+1} \Rightarrow \int S_{k+1} - \int \tilde{S}_{k+1} \leq 0 \Rightarrow = 0$

Упра:  $dd^c u_1, \dots, dd^c u_n$  (в зависимости,  $(dd^c u)^k$ ) (11-5)  
 корр. выпук. на  $L^\infty$ -пш г-мех, вып. отн.  
 уобавленных макс-прин.

Можно доказать: вып. отн. выпукт. макс-прин по  
 по максимум! Основано на убавленности  
 пш г-мех.

Для этого: монотонность  $\mathbb{R}^n$ -  
 $\mathbb{R}^n$ -

$\| E \subset \Omega; C(E) = C(E, \mathbb{R}) = \sup \{ \int (dd^c u)^n : u \in PSH(\Omega), -1 \leq u \leq 0 \}$   
 (можно определить, на каких г-мех  
 "good" sup. Рознел?)

Пример:  $C(B_r, B_1) = \frac{1}{|B_r|}$

T.  $\forall u \in PSH(\Omega), \forall \varepsilon > 0 \exists$  открытое  $G \subset \Omega$  :  
 $C(G, \mathbb{R}) < \varepsilon, u \in C(\Omega \setminus G)$

D (узел)

- 1) Возьмем  $G = \{u < -N\}$ ,  $N \gg 1$ ;  $C(G_0) < \frac{\varepsilon}{2}$   
нормализуем  $\alpha = \frac{1}{N} \chi_{\{u < -N\}}$ ,  $-N \leq \alpha \leq 0$
- 2) Возьмем  $u_k \in C(\Omega) \cap PSH(\Omega), u_k \searrow \tilde{u}$ .  
 $C(\{u_k > \tilde{u} + \delta\}, \mathbb{R}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \delta > 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \forall j \exists k(j): C(\{u_{k(j)} > \tilde{u} + \delta\}, \mathbb{R}) < \frac{\varepsilon}{2}$
- 3)  $G := \bigcup_0^\infty G_j$ ;  $C(G, \mathbb{R}) < \varepsilon$   
 $(C(\cup) \leq \sum C(\cdot))$   
 $u_{k(j)} \rightarrow \tilde{u}$  (Дунни) (= u вне  $G_0$ )  
 на  $\Omega \setminus G$   $\blacksquare$

Ta не узел: сходимости по ёмкости:

$\| u_j^l \xrightarrow{C} u \Rightarrow C(\{|u_j^l - u| > \delta\}) \rightarrow 0$

T.  $u_j^l, u_j \in L^\infty \cap PSH, u_j^l \xrightarrow{C} u_j \Rightarrow$

$\Rightarrow dd^c u_1, \dots, dd^c u_n \rightarrow dd^c u_1, \dots, dd^c u_n$

поэтому ~~тогда~~ доверено:

(14-6)

поэтому то, чтобы доказать,

$$u_j \xrightarrow{w} u \not\Rightarrow (dd^c u_j)^k \rightarrow (dd^c u)^k, \quad k > 1.$$

лишь пример! В частности,

$$\forall u \in L^\infty(\Omega) \exists u_j \xrightarrow{w} u : (dd^c u_j)^n = 0.$$

### 3. Принцип сравнения (Comparison Principle)

Один из важных инструментов, вызывающих интерес к их МА парам.

T. (Comp. Pr.) [BT].  $u, v \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$ ,

$$\liminf_{z \rightarrow \bar{w}} (u(z) - v(z)) \geq 0, \quad \forall w \in \partial\Omega.$$

$$\text{Тогда} \quad \int_{\{u < v\}} (dd^c v)^n \leq \int_{\{u < v\}} (dd^c u)^n.$$

D. (где всегда  $u, v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ,  $E = \{u < v\} \subset \Omega$  — область сравнения: квазиоткрыт и т.д.)



$$v_k = \max\{v, u + \frac{1}{k}\} \Rightarrow v_k = u + \frac{1}{k} \text{ вблизи } \partial E.$$

$$\text{Сначала: } \int_E (dd^c v_k)^n = \int_{\partial E} d^c v_k \wedge (dd^c v_k)^{n-1}$$

$$= \int_{\partial E} d^c u \wedge (dd^c u)^{n-1} = \int_E (dd^c u)^n.$$

$$v_k \downarrow v \text{ на } E \Rightarrow (dd^c v_k)^n \rightarrow (dd^c v)^n \text{ на } E$$

$$\Rightarrow \int_E (dd^c v)^n \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E (dd^c v_k)^n = \int_E (dd^c u)^n$$

(т.к.  $E$  — открытое)

Существование. Пусть  $\ln u(z) = \ln v(z)$  (III-7)

$\forall u \in \partial \Omega$ . Тогда:

1.  $\{(dd^c u)^n \leq (dd^c v)^n\} \Rightarrow v \leq u$  в  $\Omega$ .

2.  $(dd^c u)^n = 0$  в  $\Omega \Rightarrow v \leq u$ .

3.  $(dd^c u)^n = (dd^c v)^n \Rightarrow v = u$  (еvidence)  
 (где  $u, v \in L^\infty$  !!!).

Д. 1.  $E \neq \emptyset \Rightarrow \exists M > 0, \epsilon > 0$ :

$E_\epsilon := \{u \mid v + \epsilon \Psi\}$  имеет конечный диаметр по Лебегу;  $\Psi = |\mathbb{Z}|^2 - M < 0$ .

$$\int_{E_\epsilon} (dd^c u)^n \stackrel{CP}{\geq} \int_{E_\epsilon} (dd^c (v + \epsilon \Psi))^n \geq$$

$$\geq \int_{E_\epsilon} (dd^c v)^n + c_\epsilon \epsilon^n \stackrel{\text{условие } \gamma}{\geq} \int_{E_\epsilon} (dd^c u)^n + c_\epsilon \epsilon^n$$

#### 4. Максимальное psh $q$ -функция

Итак, возникло 2 класса psh  $q$ -функций:

1)  $(dd^c u)^n = 0$

2)  $u \geq v$  на  $\partial \Omega \Rightarrow u \geq v$  в  $\Omega$ .

( $\partial \Omega$  - аномалии регулярности).

Def  $u \in \text{PSH} \cap L^\infty$  - максимальная в  $\Omega$  если

$\forall \omega \subset \Omega$ ;  $u \geq v$  на  $\partial \omega \Rightarrow u \geq v$  в  $\omega$ .

откр.

I.  $u$  - макс.  $\Leftrightarrow (dd^c u)^n = 0$

D.  $\Leftarrow$  - true.

$\Rightarrow$ : Пусть  $f$  определена на  $\partial\omega$ ;  
положим  $M(f, \omega) = \sup\{u \in PSH(\omega)\}$ ;  
пр-ые Лейбна-Бриера  $\lim_{z \rightarrow w} u(z) \leq f(w)$   
 $\forall w \in \partial\omega$ ;

Если  $f$  - н/непр. сверху, то  
 $M(f, \omega) \in PSH(\omega)$ .

Возьмем  $u_\epsilon \in C^\infty \searrow u$ , тогда

$$v_\epsilon := u(u_\epsilon, \omega) \searrow u \text{ на } \bar{\omega}.$$

Потому как доказано:  $(dd^c v_\epsilon)^n = 0$  на  $\omega$ .

$v_\epsilon$  не отрицат. макс., но можно  
показать, что:  $u_\epsilon \in C^\infty \Rightarrow v_\epsilon \in C^2$  н.б.

$$u (dd^c v_\epsilon)^n = c_n \det H_{v_\epsilon} dV \text{ н.б.}$$

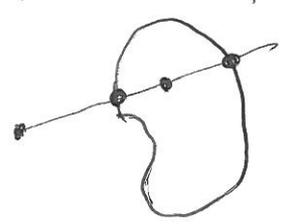
Пусть  $\det H_{v_\epsilon}(z_0) > 0$ ;

$$u(z_0+h) = \overbrace{u(z_0) + \operatorname{Re} \left[ 2 \sum \frac{\partial^2 u}{\partial z_j^2}(z_0) h_j + \sum \frac{\partial^2 u(z_0)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} h_j \bar{h}_k \right]}^{P(h)} + o(|h|^2)$$
$$\geq P(h) + c|h|^2 + o(|h|^2)$$

где какое-то  $c > 0$ .

Потому  $\exists r > 0: |h| \leq r \Rightarrow u(z_0+h) > P(h) = u(z_0)$   
но  $u(z_0) = P(0)$ , т.е.  $u$  - не макс.  $\blacksquare$

Пример.



1.  $u(z) = \log|z|$  max в  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ :  
 $0 \notin D$ ;  $\forall z_0 \in D$ :  $\ell = \{sz_0: s \in \mathbb{C}\}$   
 $u_\ell(s) = u(sz_0) = \log|s| + \log|z_0|$   
 $v \in \text{PSH}(\bar{D})$ ,  $v \leq u$  на  $\partial D \Rightarrow$   
 $\Rightarrow v_\ell(z) \leq u_\ell(z)$  на  $\partial D_\lambda \Rightarrow$   
 $\Rightarrow v_\ell(z) \leq v_\ell(z)$  на  $D_\lambda \Rightarrow$   
 $\Rightarrow v(z_0) = v_\ell(1) \leq u_\ell(1) = \log|z_0|$ .

Следс.,  $(dd^c \log|z|)^n = 0$  в  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

2. Аналогично:

$u_N(z) = \frac{1}{2N} \log(|z_1|^{2N} + \dots + |z_n|^{2N})$   
max в  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (dd^c u_N)^n = 0$  в  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ;  
 $u_N(z) \nearrow \max_j \log|z_j| \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (dd^c \max_j \log|z_j|)^n = 0$  в  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$   
 $\Rightarrow$  max  $\Gamma_{\text{ан}}$ .

Пример.  $K \subset \subset \Omega$ ;

(III-18)

$$u_k = \sup \{ u \in PSH(\Omega) : u \leq 0 \text{ в } K, u \leq -1 \text{ на } \partial K \}$$

Тогда  ~~$(dd^c u_k)^n = 0$~~   $(dd^c u_k)^n = 0$  в  $\Omega \setminus K$  (монотонность).

$$C(K, \Omega) = (dd^c u_k)^n.$$

### 5. Общее задание Дирихле

$\Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$ ,  $f \geq 0$  - мера в  $\Omega$ ;  $f$  - густая мера.

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = \mu \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

~~(BT)~~  $u(f, \mu, \Omega) = \sup \{ u \in PSH(\Omega) : (dd^c u)^n \geq \mu, \limsup u \leq f \}$ .

$\Omega$ -непроблемное

(BT)  $f \in C(\partial\Omega)$ ,  $\mu = f dV$ ,  $f \in C(\bar{\Omega}) \Rightarrow$

з.д.  $u \in C(\bar{\Omega})$ ,  $u$  - решение уравнения,  $f \in C(\bar{\Omega})$ .

возвращаем:  $\mu = f dV$ ,  $f \in L^p(\Omega)$ .