

# Операторы Montreal-Aniserga

Лекции в АНУ, 17-22 окт. 2014г.

## I. Введение. Морбайнер

Анализ. ф-ии - основной объект изучения, отображающий

f. BC  $f \mapsto \log|f|$ : реальная переменная.

1.1.  $f(a) \neq 0 \Rightarrow f = e^g$  в окр.  $a \Rightarrow \log|f| = \operatorname{Re} g$ :

аналитич. ф-ии:  $\Delta \log|f| = 0$  близ  $a$

$$(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{4 \partial^2}{\partial z \partial \bar{z}})$$

1.2  $f(a) = a \Rightarrow f(z) = (z-a)^k e^{g(z)}$ , ~~запись~~

$$\Delta \log|f| = \Delta(k \log|z-a|) + \Delta \operatorname{Re} g = 2\pi \cdot k \cdot \delta_a$$

Вопрос:  $u = \log|f|$  - ли  $q$ -функция, ее

некоммутат. мера  $\mu_u = \frac{1}{2\pi} \Delta u = \sum m_a \delta_a \geq 0$ .

Вопрос:  $\Delta u$  - б. симметрическое распределение  
(одобрен.  $q$ -функцией), т.е. вып. мера  $q$ -изолирована

на  $\mathbb{D} = \mathbb{C}_0^\infty$ ;  $\langle T, \varphi \rangle : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ;  $T \in \mathbb{D}'$ .

Мы хотим запрограммировать:

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \varphi \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial y}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial T}{\partial y}, \varphi \right\rangle,$$

$$\langle \Delta T, \varphi \rangle = \langle T, \Delta \varphi \rangle.$$

II  $T \in \mathbb{D}'$ :  $T \geq 0 \Leftrightarrow \langle T, \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}, \varphi \geq 0$ .

Утверждение:  $T \geq 0 \Rightarrow T$  - выпукл. мера:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int \varphi d\mu.$$

Измер/запись:  $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \cdot \|\varphi\|_\infty$ .

Чтение  $\sim$  и  $d\mu \in \mathbb{D}'$ : переносное распределение  
(такое б.е. изолированное  $q$ -функция).

Stoerres-Poisson-Jensen

$u \in SH(\bar{D})$ ,  $D \subset \mathbb{C}$  - off.;

$$u(z) = \int_D u(s) P(z, s) ds + \int_D f(z, w) d\mu_w(w)$$

resp.  $\quad \quad \quad D \quad \text{inner.}$

$G$ : potentielle Funktion:

$$\begin{cases} G \in SH(D), \\ \Delta G(z, w) = 2\pi \delta_z, \\ G(z, w) = 0 \text{ na } \partial D. \end{cases}$$

$$G(z, s) = G(z,$$

$$G(z, w) = \log|z-w| + h_z(w)$$

resp.;

$h_z$  - reell. Basalm. Differenz:

$$P(z, s) \left( \frac{\partial G}{\partial w} \right) - \text{effektiv. Reaktion.}$$

$\begin{cases} \Delta h_z = 0, \\ h_z(w) = -\log|z-w|, \end{cases}$   
 $w \neq z.$

Bemerkung:

~~1.  $T_j \rightarrow T$~~

1. Transformation  $T \in \mathcal{D}'$  - erlaubt:

$$v_{T_j} T_j \rightarrow T : (T_j, \varphi) \rightarrow (T, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Bei rein. disp. on - ph. Temperatur:

$$\Delta T_j, \Delta T \langle DT_j, \varphi \rangle = \langle T_j, \Delta \varphi \rangle = \dots$$

2.  $u_j \in SH$ ,  $u_j \xrightarrow{T_j} u \Leftrightarrow u_j \xrightarrow{T_j \text{ loc}} u$ .

3. Dachaufstieg, boolesche Algebra,  
reelle nicht negat. Zahl

$$(T \in \frac{1}{|z|} \in \mathcal{D}', \text{ no } T^2 = \frac{1}{|z|^2} \notin \mathcal{D}')$$

(I-)

 $\mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 1$ .

$$f(z) = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k = \sum c_k (z-a_1)^{k_1} \cdots (z_n-a_n)^{k_n},$$

$$k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \|k\| = \sum k_j.$$

Anwendung auf  $a$ .

Def.:  $\exists \frac{\partial f}{\partial z_i}$  b.  $a$ ,  $b_j$  ( $\Leftrightarrow$   $f$ -diffbar.)  
 $f \mapsto \log|f|$ .  
 (T. Hartogs) no category exp.)

$$1) f(a) \neq 0 \Rightarrow f(z) = e^{g(z)} \text{ b. } a,$$

$\log|f| = \operatorname{Re} g$ : raus. no branch.  $z_j$ ;

dann raus,  $\forall l \in \mathbb{C}^n$ ,

$$V_e(s) = V(a + ls), s \in \mathbb{C} - \text{raus. no } s \text{ b. exp. 0.}$$

$$\Rightarrow \Delta V_e = 0 \quad \forall l \in \mathbb{C}^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j,k} \frac{\partial^2 V}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} l_j \bar{l}_k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_V = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right) = 0 \quad (\text{Hessian});$$

metrischer Monotrack.

$$2) f(a) = 0; \text{ raus raus } Z_f = \{z : f(z) = 0\}?$$

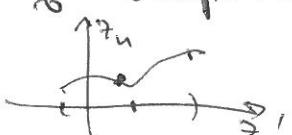
$$= \{z : \operatorname{Re} f(z) = 0, \operatorname{Im} f(z) = 0\}: (2n-2)-\text{dimensional};$$

es ist vom reellen sprach:

$$\nabla f(a) \neq 0 \Rightarrow f(z_1, \dots, z_n) = 0 - \text{Hebung}$$

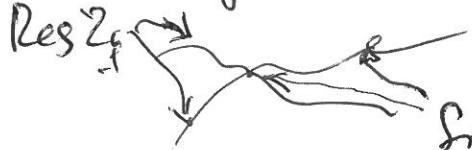
zusammen gruen, zusammen

$$\text{b. } a: z_n = F(\underbrace{z_1, \dots, z_{n-1}}_{z'},$$



до определенной симметрии (1-1)-перехода (I-4) к одномерскому изоморфоподобию.

Много это примерное число:



(аналог фигуры Тоне для одномерной симметрии...).

В окр-н  $\alpha \in \text{Reg } Z_f$ :  $Z_f$  бывает примерно так же, как  $\alpha$  в  $\{z_n = 0\}$  (это и изображено выше).

$$\Delta \log |Z_n| = 2\pi \cdot [z_n = 0] - 2\pi \text{ для } \alpha?$$

Нока схема  $\alpha$ :  $\alpha$   $\in C^n$ ,  
равномерно распределена в  $\{z_n = 0\}$ :

$$\Delta \log |f_n(D)| = 2\pi \cdot V_{2n-2}(D \cap \{z_n = 0\}).$$

Но: число  $Z_f$  неизвестно:  $f_1(z) = z_n$ ,  
 $f_2 = z_n^2$ ,  $Z_{f_1} = Z_{f_2}$ , но  $\log |f_2| = 2 \log |f_1|$ .

Но это умножить можно.

Установлено некоторое правило на-бла:

Доказательство  $Z_f = (|Z_f|, m_f) = \{(Z_k, m_k)\}$

$m_k: \text{Reg } Z_f \rightarrow \mathbb{Z}_+^*$ , л.с. наше

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \log H(D) = \sum_k m_k \text{Vol}_{2n-2}(Z_k \cap D).$$

Безусловно, ~~здесь~~  
здесь

Что есть о н.к.  $|f|$ ?

$u_e(z) = u(a + ls)$  — с.р. б. оп. 0 HLF( $\mathbb{C}^n \Rightarrow$ )  
 $\Rightarrow \log|f| - n.c.r.$

(Def.  $u \in \text{PSH}(\Omega)$ :  $u$  — н.к. для  $x, y$ ,  
 $u_e$  — с.р. б. оп.  $\mathbb{C}^n$ ,  $b \in \Omega$ ).

Характеризация:

$$\Delta u_e = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} l_{ij} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \underline{H_u} \geq 0 \quad (\text{б. симметрическ.})$$

Что:  $\log|f| - n.c.r.$  б. оп. 2-го.

~~Неко~~ (неко. генерал.:  $u - n.c.r. \Rightarrow u \in \text{PSH}$ )

Замечание.

1.  $D \subset \mathbb{C}^n$ ; как определить з.д.р.  $\Delta h = 0$  &  $D$ .  
 $u = f \text{ на } \partial D$ .

Например,  $f$  репр.:

$$h = \sup \{u \in \text{SH}(D), u|_{\partial D} \leq f\}.$$

Потом  $\Delta h = 0$ ,  $u|_{\partial D} = f$ .

Если же  $D \subset \mathbb{C}^n$ ,  $n > 1$ ,

$$h = \sup \{u \in \text{PSH}(D): u|_{\partial D} \leq f\} —$$

не однозначно в  $\text{PSH}$ !

2.  $n=1$ ,  $\mu \geq 0 \Leftrightarrow \mu = \mu_n$  где  $\mu \in \text{SH}$  (однозначно!).  
 $n > 1$ ,  $\mu \geq 0 \not\Rightarrow \mu = \mu_n$  где  $\mu \in \text{PSH}$ .

3.  $f = (f_1, f_2): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$  — з.д.р. оп.  $j$   $k \leq n$ ;

однозначно:  $\dim \text{ker } f = n-k$ ,  $u$

$\Delta \log|f|$  — а.с. непрерывное мера,  
т.е.  $\Delta \log|f||_{\text{ker } f} = 0$ .